

1 計算のきまり

計算の順序

どんな式もこの順で計算する。ここを守るだけで計算ミスは大きく減る。

累乗 → かけこの中 → $\times \div$ → $+-$

$-a^2$ と $(-a)^2$

2乗するのが「数だけ」か「マイナスごと」かのちがい。入試で最も差がつくミス。

$$-3^2=-9 \quad (-3)^2=9$$

負の数の累乗

指数が偶数なら＋、奇数なら－になる。

$$(-2)^2=4 \quad (-2)^3=-8$$

逆数

かけて1になる数。分数のわり算は逆数のかけ算に直す。

$$6 \div \frac{2}{3} = 6 \times \frac{3}{2} = 9$$

分配法則

かけこの外の数や、中のすべての項にかける。うしろが－のときは中の全部の符号が変わる。

$$-2(3x-4y) = -6x+8y$$

平方根の計算

根号どうしは中身をかけ算・わり算できる。答えは必ず根号の中を最も小さい自然数にする。

$$\sqrt{2} \times \sqrt{6} = \sqrt{12} \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

有理化

分母に根号が残っていたら、分母と分子に同じ根号をかけて分母から根号を消す。

$$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

乗法公式

展開の型。逆向きに使えば因数分解になる。

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2ax + a^2$$

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

因数分解の手順

まず共通因数でくくる。それから公式にあてはめる。この順を飛ばすと解けない。

$$5x^2-5y^2 = 5(x^2-y^2) = 5(x+y)(x-y)$$

2 式と方程式

単項式の乗除

係数どうし・文字どうしで計算する。わり算は逆数のかけ算に直してから。同じ文字の指数はかけ算なら足す・わり算なら引く。

$$a^2b \div 3ab \times (-9a) = -3a^2$$

同類項

文字の部分がまったく同じ項。係数どうしを足し引きしてまとめる。

$$3a-5b+2a+b = 5a-4b$$

分数の式の通分

分母の最小公倍数にそろえる。分子にかっこをつけてから引くこと。

$$\frac{3x-y}{2} - \frac{2x-5y}{6} = \frac{7x+2y}{6}$$

二次方程式の解の公式

因数分解できないときに使う。 $a \cdot b \cdot c$ の符号をそのまま代入するのがコツ。

$ax^2+bx+c=0$ のとき

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

解いたあとの整理

根号の中を最も小さい自然数にしてから、分子と分母を共通の数で約分する。

$$\frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

等式変形

求めたい文字だけを左辺に残す。分数は先に両辺を何倍かして整数の形にすると速い。

$$V = \frac{1}{3}Sh \rightarrow 3V = Sh \rightarrow h = \frac{3V}{S}$$

文章題の型

求めたいものを x とおく。長さ・個数は負の解を捨てることを忘れない。

「2 乗した数と 2 倍した数の和が 4」
 $\rightarrow x^2+2x=4 \rightarrow x^2+2x-4=0$

3 データの活用（用語辞典）

階級・階級の幅・階級値

データを区切った区間が階級、その幅が階級の幅、階級のまん中の値が階級値。

「10 以上 20 未満」なら 幅=10、階級値=15

度数・度数分布表

各階級に入るデータの個数が度数。それを表にしたものが度数分布表。

相対度数

その階級の割合。全体を 1 としたときの大きさ。

相対度数 = $\frac{\text{その階級の度数}}{\text{度数の合計}}$

累積度数・累積相対度数

いちばん小さい階級からその階級までを足していった合計。「〇〇未満は何人か」を聞かれたらこれ。

平均値

全部を足して個数でわった値。度数分布表からは階級値を使って計算する。

平均値 = $\frac{\text{データの合計}}{\text{個数}}$
表から = $\frac{(\text{階級値} \times \text{度数}) \text{の合計}}{\text{度数の合計}}$

中央値（メジアン）

小さい順に並べたときのまん中の値。個数が偶数のときは、まん中 2 つの平均。

9 個 $\rightarrow$ 5 番目
8 個 $\rightarrow (4 \text{ 番目} + 5 \text{ 番目}) \div 2$

最頻値（モード）

いちばん多く出てくる値。度数分布表なら度数が最大の階級の階級値。

範囲（レンジ）

散らばりの大きさ。

範囲 = 最大値 - 最小値

四分位数

データを小さい順に並べ、中央値でまず半分に分ける。下の組のまん中が Q_1 （第 1 四分位数）、中央値が Q_2 、上の組のまん中が Q_3 （第 3 四分位数）。個数が奇数のとき、中央値は上下どちらの組にも入れない。

3 7 9 11 15 23 32 36 39
 $Q_1=(7+9) \div 2=8$ 、 $Q_2=15$ 、 $Q_3=(32+36) \div 2=34$

四分位範囲

まん中 50% がどれくらい散らばっているかを表す。極端な値（外れ値）の影響を受けにくいのが長所。

四分位範囲 = $Q_3 - Q_1$
上の例では $34-8=26$

箱ひげ図

最小値・ Q_1 ・中央値・ Q_3 ・最大値の 5 つを図にしたもの。箱の長さが四分位範囲、ひげの端から端までが範囲。

全数調査と標本調査

全部を調べるのが全数調査（出席確認・健康診断・国勢調査）。一部だけ調べて全体を推測するのが標本調査。全部調べるのが不可能・こわしてしまう・手間がかかりすぎるものが標本調査。

標本調査の例：製品の品質検査、水質検査、視聴率

母集団・標本・無作為抽出

調べたい全体が母集団、取り出した一部が標本。かたよりが出ないように選ぶことを無作為に抽出するという。

標本調査の計算

標本の割合＝全体の割合とみて比例式をつくる。

白玉の袋にオレンジ 30 個 $\rightarrow$ 10 個取って 3 個
 $30 : x = 3 : 10 \rightarrow x=100 \rightarrow$ 白玉 $100-30=70$ 個

4 確率

同様に確からしい

どの結果も同じ起こりやすさであること。確率の問題は必ずこれを前提にしている。

確率の求め方

分母は起こりうる全部の場合の数、分子はあてはまる場合の数。最後に必ず約分する。

確率 = $\frac{\text{あてはまる場合の数}}{\text{全部の場合の数}}$

さいころの場合の数

2 個なら 6×6 、3 個なら $6 \times 6 \times 6$ 。2 個のときはたて 6 $\times$ よこ 6 の表をかいて数えるのが速くて確実。

2 個 $\rightarrow$ 36 通り 3 個 $\rightarrow$ 216 通り

取り出す（組合せ）

「同時に 2 枚取り出す」は**順番が関係ない**。A と B、B と A は同じ 1 通り。

5 枚から 2 枚 → 10 通り
6 枚から 2 枚 → 15 通り

並べる（順列）

「3 枚取り出して並べて 3 けたの整数をつくる」は**順番が関係する**。位ごとに残りの枚数をかけていく。

5 枚から 3 枚並べる → 5×4×3=60 通り

樹形図

数え落とし・重複をふせぐ道具。迷ったら必ずかく。

5 平面図形の角と三平方

対頂角・同位角・錯角

対頂角はいつでも等しい。2 直線が平行なとき、同位角も錯角も等しい。

三角形の角

内角の和は 180°。1 つの外角は、それととなり合わない 2 つの内角の和に等しい。

多角形の角

n 角形の内角の和は $180 \times (n-2)$ 。外角の和は n によらず 360°。

正 12 角形：内角の和 1800°
1 つの外角 $360 \div 12 = 30^\circ$ 、1 つの内角 150°

円周角の定理

同じ弧に対する円周角はすべて等しい。円周角は**中心角の半分**。

弧 BC の円周角 = 弧 BC(中心角) $\div 2$

半円の弧に対する円周角

直径をはさむ円周角は必ず 90°。直径を見たら 90° を疑う。

円に内接する四角形

向かい合う角の和は 180°。

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

2 つの弦の交点の角

円の**内部**で交わる角は、はさむ 2 つの弧の**和**の半分。円の**外部**で交わる角は、2 つの弧の**差**の半分。

内部：(弧+弧) $\div 2$
外部：(弧-弧) $\div 2$

接線の性質

接線は接点を通る半径に**垂直**。円外の 1 点から引いた 2 本の接線の長さは等しい。

三平方の定理

直角三角形で、斜辺の 2 乗＝他の 2 辺の 2 乗の和。

$a^2 + b^2 = c^2$

覚えておく直角三角形

計算せずに答えが出せるので必ず覚える。

3:4:5 5:12:13 8:15:17 7:24:25
1:1: $\sqrt{2}$ (45°) 1:2: $\sqrt{3}$ (30°・60°)

正三角形の高さと面積

1 辺 a の正三角形。

高さ = $\frac{\sqrt{3}}{2} a$ 面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

相似比

相似比が $1:n$ のとき、面積比は $1:n^2$ 、体積比は $1:n^3$ 。

9 発展セットで追加される考え方

面積・体積を 2 通りに表す

垂線の長さや「点と平面の距離」は直接は測れない。同じ図形の面積（体積）を、別の底辺（底面）で 2 通りに書いて等号で結ぶと出てくる。発展編で最もよく使う道具。

$\triangle ABC$ で $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 = \frac{1}{2} \times 15 \times BH$
 $\rightarrow BH = \frac{36}{5}$

展開して直線にする

「側面にそってひもをかける」「糸を巻く」は、必ず**展開図**にして直線で結ぶ。曲がったまま考えない。

円錐を 1 周 → 展開して中心角 θ° のおうぎ形
ひも = $2 \times \text{母線} \times \sin(\theta^\circ \div 2)$ の形になる

相似比で一気に出す

相似比 $1:n \rightarrow$ 面積比 $1:n^2$ 、体積比 $1:n^3$ 。円錐台はもとの円錐から小さい円錐を引くのではなく、**比で一発**で出せる。

頂点から高さの半分で切る → 相似比 1:2
円錐台 = もとの $\frac{7}{8}$

弧を文字でおく

円の角は**すべて弧で決まる**。わからない弧を x 、 y とおくと、円周角・交点の角がぜんぶ $x \cdot y$ の式になり、連立方程式で解ける。

$\angle BEC = (x-y) \div 2$ 、 $\angle BFC = (x+y) \div 2$
~~たすと x 、ひくと y が出る~~

正四面体の高さ

頂点から底面へ下ろした垂線の足は、底面の正三角形の重心。重心と頂点の距離は中線の $\frac{2}{3}$ 。

1 辺 $a \rightarrow$ 高さ $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ 、体積 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

円錐に内接する球

軸を通る断面（二等辺三角形）を考えると、球はその内接円になる。内接円の半径は 面積 $= \frac{1}{2} \times (\text{周の長さ}) \times r$ から出す。

底面の半径 r 、母線 l 、高さ h
球の半径 $= \frac{rh}{r+l}$

解の公式のあと

根号の中を最も小さい自然数にしてから、分子と分母を共通の数で約分する。ここを飛ばすと不正解になる。
$$\frac{-4 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

負の解を捨てる

長さ・個数・人数を x とおいた文章題は、二次方程式の解が 2 つ出ても条件に合う方だけが答え。切り取る正方形なら $0 < x < (\text{短い辺}) \div 2$ など。

10 演習で追加した単元

素因数分解

自然数を素数だけの積で表すこと。小さい素数から順にわっていく。最大公約数は共通する素因数を指数の小さい方で、最小公倍数は指数の大きい方でかけ合わせる。
$$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$$

平方根の整数部分

$n^2 < a < (n+1)^2$ なら $n < \sqrt{a} < n+1$ 。各辺を 2 乗して考えるのがコツ。
 $\sqrt{30} \rightarrow 25 < 30 < 36$ なので整数部分は 5

$\sqrt{na}$ が整数

素因数分解して、指数が奇数の素因数をかければ全部偶数にできる。
 $40 = 2^3 \times 5 \rightarrow a = 2 \times 5 = 10$

近似値と有効数字

四捨五入して p になる範囲は「 p -半きざみ 以上、 p +半きざみ 未満」。下は以上、上は未満。
 3.7 に四捨五入 $\rightarrow 3.65 \leq a < 3.75$

不等式で表す

以上 $\geq$ 、以下 $\leq$ 、より大きい $>$ 、未満・より小さい $<$ 。
「おつりがある」「足りない」は等号を含まない。

平行線と線分の比

$DE \parallel BC$ のとき $AD:AB = AE:AC = DE:BC$ 。また $AD:DB = AE:EC$ も成り立つ（2 つは別の式なので混同しない）。

中点連結定理

2 辺の中点を結んだ線分は、残りの辺に平行で長さは半分。
 $MN \parallel BC$ 、 $MN = \frac{1}{2}BC$

おうぎ形

円の一部。中心角の割合だけ円周・円の面積をとる。
$$\text{弧} = 2\pi r \times \frac{a}{360} \quad \text{面積} = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$

$$\text{面積} = \frac{1}{2} \times \text{弧} \times \text{半径} \text{ でもよい}$$

ねじれの位置

空間で、平行でなく、交わりもしない 2 直線の関係。まず交わる辺と平行な辺を消していくと残る。

順列と組合せ

並べる（順番が関係する）と選ぶ（順番が関係しない）を区別する。選ぶ場合は、並べ方をその個数の並べかえでわる。
$$5 \text{ 個から } 3 \text{ 個並べる} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$5 \text{ 個から } 3 \text{ 個選ぶ} = 60 \div (3 \times 2 \times 1) = 10$$

規則性

「はじめの数」+「1 つふえるごとの増え方」 $\times (n-1)$ の形にする。図をいくつか書いて差を調べるのが基本。
 $4, 7, 10, 13, \dots \rightarrow 3n+1$

比例・反比例

比例 $y=ax$ ($a=y \div x$)、反比例 $y=a \div x$ ($a=xy$)。

6 空間図形用語

底面・側面

柱や錐の「上下のふた」にあたる面が底面、まわりの面が側面。

母線

円錐の頂点と、底面の円周上の点を結んだ線分。円錐の「斜めの辺」のこと。高さとは別物なので混同しないこと。
半径 r 、高さ h 、母線 l のとき
$$l^2 = r^2 + h^2$$
 基本40セット／発展10セット 共通

高さ

底面に垂直におろした線分の長さ。母線や斜高と間違えやすい。

展開図・見取図

切り開いて平面にしたものが展開図、立体のまま描いたものが見取図。

円錐の展開図

側面はおうぎ形になる。おうぎ形の弧の長さ＝底面の円周だから中心角が決まる。

$$\text{中心角} = 360^\circ \times \frac{\text{半径}}{\text{母線}}$$

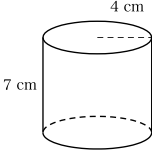
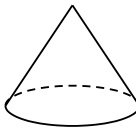
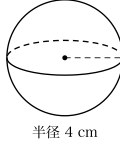
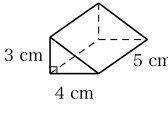
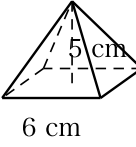
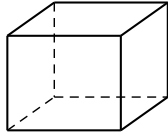
表面上の最短経路

「ひもをかける」「糸を巻く」ときは必ず展開図にして直線で結ぶ。曲がったまま考えてはいけない。

ねじれの位置

空間で、平行でもなく交わりもしない 2 直線の関係。

7 体積・表面積の公式一覧

角柱・円柱		体積 = 底面積 × 高さ 表面積 = 底面積×2 + 側面積 (円柱の側面積 = $2\pi rh$)
角錐・円錐		体積 = $\frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高さ}$ 円錐の側面積 = $\pi \times \text{母線} \times \text{半径}$
球		体積 = $\frac{4}{3} \pi r^3$ 表面積 = $4\pi r^2$
三角柱		体積 = 底面の三角形の面積 × 高さ 表面積 = 底面×2 + (底面の周)×高さ
正四角錐		体積 = $\frac{1}{3} \times (1 \text{ 辺})^2 \times \text{高さ}$ 側面の三角形の高さ(斜高)は三平方で出す
立方体・直方体		体積 = 縦×横×高さ 対角線 = $\sqrt{(\text{縦}^2 + \text{横}^2 + \text{高さ}^2)}$

8 関数

$y=ax+b$

一次関数。 a が傾き (x が1増えたときの y の増え方)、 b が切片 (y 軸との交点)。

$$2 \text{ 点から求めるとき} \quad \text{傾き} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}}$$

$y=ax^2$

グラフは原点を通る放物線。 $a>0$ なら下に凸、 $a<0$ なら上に凸。

変域

x の動ける範囲に対する y の範囲。 $y=ax^2$ で x の変域が0をまたぐとき、 y の最小値は0になる。ここが最頻出のワナ。

$$y=\frac{1}{3}x^2, -3\leq x\leq 1 \rightarrow 0\leq y\leq 3$$